TD 5 - Groupes d'homotopie

Notions du cours.

- Chemins, chemins homotopes (à extrémités fixées), lacets.
- Opérations sur les chemins, sur les homotopies (concaténation, inversion de l'orientation).
- Espaces simplement connexes.
- Groupe fondamental.
- Groupe fondamental du cercle, degré d'une application sur $\mathbb{S}^1$.
- Applications : théorèmes de d'Alambert-Gauss, du point fixe de Brouwer, de Borsuk-Ulam.

Définition. Si X, Y sont deux espaces topologiques localement compacts, la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{C}^0(X,Y)$ est la topologie engendrée par les ensembles

$$\mathcal{N}_{K,U} = \{f \in \mathcal{C}^0(X,Y) \mid f(K) \subseteq U\},$$

avec K qui varie parmi les compacts de X et U parmi les ouverts de Y.

Si Y est un espace métrique, on peut montrer que la topologie compacte-ouverte est la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X.

Groupe fondamental

Exercice 1. Donner un exemple d'application continue injective (resp. surjective, resp. bijective), $f : X \to Y$, n'induisant pas un homomorphisme injectif (resp. surjectif, resp. bijectif) entre les groupes fondamentaux.

Exercice 2. Montrer que le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$ d'un groupe topologique G est toujours abélien. *Indication : on pourra utiliser la multiplication de deux chemins α et β définie par la loi de G, i.e. $(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t)\beta(t)$.*

Exercice 3. Soit X un espace topologique connexe par arcs et x, y deux points de X. Considérons deux chemins de X, γ_1, γ_2 de x à y, et les isomorphismes $\Phi_{\gamma_j} : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ définis par

$$\Phi_{\gamma_j}([\alpha]) = [\overline{\gamma_j} * \alpha * \gamma_j].$$

Montrer que $\Phi_{\gamma_1} = \Phi_{\gamma_2}$ si, et seulement si, la classe $[\gamma_2 * \overline{\gamma_1}]$ commute avec tous les éléments de $\pi_1(X,x)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'isomorphisme $\Phi_\gamma : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ ne dépende pas du choix du chemin γ.

Exercice 4. Soit $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ le groupe des matrices réelles $n \times n$ inversibles et $\mathrm{O}(n)$ le groupe orthogonal. Notons $g : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{O}(n)$ le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

(a) Montrer que g est une application continue et définit une équivalence d'homotopie.

(b) Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{O}(2)$ et leur groupe fondamental. En déduire $\pi_1(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}), \mathrm{id})$.

Exercice 5. Si X est un espace topologique, l'espace des configurations de m points dans X est le sous-espace $F(X,m)$ du produit X^m, constitué des couples $(x_1, \ldots, x_m)$ tels que $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$.

(a) Montrer que $F(\mathbb{S}^1, 2)$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Calculer $\pi_1(F(\mathbb{S}^1, 2))$ et en expliciter des générateurs.

Soit maintenant $X = \mathbb{R}^n$, et considerons $\mathbb{S}^{n-1}$ comme le sous-espace de $F(\mathbb{R}^n, 2)$ constitué des points $(0, y)$ pour $y \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(b) Montrer que $\mathbb{S}^{n-1}$ est un rétracte par déformation de $F(\mathbb{R}^n, 2)$. En déduire $\pi_1(F(\mathbb{R}^n, 2))$.

Exercice 6. On rappelle que le centre d'un groupe G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres éléments :

$$Z(G) = \{g \in G, gh = hg, \forall h \in G\}.$$

Soit X un espace topologique. On considère $F : X \times I \to X$ une homotopie telle que $\forall x \in X, F(x,0) = F(x,1) = x$. Pour $x_0 \in X$, on considère le lacet $\gamma_{x_0} : I \to X$ qui à t associe $F(x_0, t)$. Montrer que $[\gamma_{x_0}] \in Z(\pi_1(X, x_0))$.

Exercice 7. Montrer que pour un espace topologique X les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Toute application continue $\mathbb{S}^1 \to X$ est homotope à une application constante.

(ii) Toute application continue $\mathbb{S}^1 \to X$ s'étend à une application continue $\mathbb{B}^2 \to X$.

(iii) $\pi_1(X, x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in X$.

En déduire que X est simplement connexe si et seulement si toutes applications continues $\mathbb{S}^1 \to X$ sont homotopiquement équivalentes.

Exercice 8. Soit X un espace topologique connexe par arcs, et A, B deux ouverts tels que $X = A \cup B$.

(a) Montrer que si A et B sont simplement connexes, et $A \cap B$ est connexe par arcs et non-vide, alors $A \cup B$ est simplement connexe.

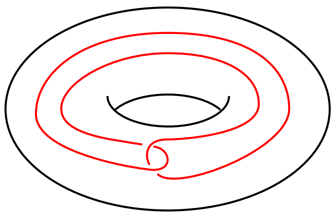
(b) Est-ce que la même conclusion vaut si A et B ne sont pas ouverts dans X ?

Exercice 9. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction $r : X \to A$ dans les cas suivants :

(a) $X = \mathbb{R}^3$ et A est n'importe quel sous-espace homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

(b) $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ et A est son bord $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(c) $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ et A est le cercle montré en figure.



(d) $X = \mathbb{B}^2 \vee \mathbb{B}^2$, où le bouquet est fait sur deux points du bord, et A est son bord $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

(e) X est un disque $\overline{\mathbb{D}}$ où on identifie 1 et -1, et A est son bord (l'image de $\partial\mathbb{D}$ par rapport à la projection naturelle sur X).

(f) X la bande de the Möbius et A son bord.

Degré d'un application sur $\mathbb{S}^1$.

Exercice 10. On identifie ici $\mathbb{S}^1$ à $\partial\mathbb{D}$ l'ensemble des complexes de module 1.

(a) Montrer que $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$. En déduire que $\deg(\overline{f}) = -\deg(f)$.

(b) Montrer que $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

(c) Donner le degré de l'application $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ définie par $f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } \operatorname{Im}(z) \geq 0, \\ z^{-2} & \text{si } \operatorname{Im}(z) \leq 0 \end{cases}$.

(d) Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynome de degré n, qui n'a pas de racine sur $\mathbb{S}^1$. Calculer le degré de l'application $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ donnée par $f(z) = \frac{P(z)}{|P(z)|}$.

Exercice 11. Montrer que toute application continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$ qui n'a pas de point fixe est homotope à l'identité. En déduire que toute application de degré différent de 1 a un point fixe.

Conséquences de $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Exercice 12 (Théorème de Perron-Frobenius en dimension 3). Soit $K = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$, et $f : K \to K$ une fonction continue.

(a) Montrer que f admet un point fixe x.

(b) En déduire que pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} \geq 0$ pour tout i, j, il existe $\lambda \geq 0$ et un vecteur $x = (x_i) \in \mathbb{R}^3$ non nul et tel que $x_i \geq 0$ et $Ax = \lambda x$.

Exercice 13 (Théorème de Borsuk-Ulam). Le théorème de Borsuk–Ulam dit que pour toute $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

(a) Montrer le théorème de Borsuk-Ulam pour $n = 1$.

(b) Montrer le théorème de Borsuk-Ulam pour $n = 2$. (*Indication : procéder par l'absurde, et considérer* $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ *donnée par* $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$.)

Exercice 14. Est-ce que le théorème de Borsuk–Ulam vaut sur le tore ? Autrement dit, est-ce que pour toute application continue $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ il existe $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tels que $f(x, y) = f(-x, -y)$?

Exercice 15. Soient A_1, A_2, A_3 trois ensembles compacts dans $\mathbb{R}^3$. En utilisant le théorème de Borsuk-Ulam, montrer qu'il existe un plan P dans $\mathbb{R}^3$ qui divide simultanément chaque A_j en deux parties de la même taille.

Groupes d'homotopie d'ordre supérieur.

Exercice 16 (**Groupe d'homotopie d'ordre** n**, cubes**)**.** Soit X un espace topologique, et $x_0 \in X$ un point base. Considérons l'espace $F_n(X, x_0)$ des fonctions continues $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ (c'est-à-dire, $f : I^n \to X$ et $f(\partial I^n) = x_0$), avec $I = [0, 1]$ et $n \geq 1$.

(a) Montrer que la relation d'homotopie relative à ∂I^n (qu'on note $\sim$) est une relation d'équivalence dans $F_n(X, x_0)$.

On définit $\pi_n(X, x_0)$ comme l'ensemble de classes d'équivalence de $F_n(X, x_0)$ par rapport à $\sim$. Si $f \in F_n(X, x_0)$, on dénote par $[f]$ sa classe d'équivalence dans $\pi_n(X, x_0)$.
Sur $F_n(X, x_0)$ on considère la concaténation par rapport à la j-ième coordonnée :

$$(f *_j g)(t) = \begin{cases} f(t_1, \ldots, t_{j-1}, 2t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n) & \text{si } t_j \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(t_1, \ldots, t_{j-1}, 2t_j - 1, t_{j+1}, \ldots, t_n) & \text{si } t_j \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{1}$$

(b) Montrer que $*_j$ induit une opération sur $\pi_n(X, x_0)$, donnée par $[f] *_j [g] = [f *_j g]$.

(c) Montrer que pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a $[f] *_j [g] = [f] *_1 [g]$ pour tout $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$.

On dénote cette opération plus simplement comme $*$.

(d) Montrer que $(\pi_n(X, x_0), *)$ est un groupe (dit *groupe d'homotopie d'ordre* n).

(e) Montrer que le groupe d'homotopie d'ordre n est abélien pour $n \geq 2$.

(f) Montrer que si X est connexe par arcs, alors $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_0')$ pour tout $x_0, x_0' \in X$.

Exercice 17 (**Groupe d'homotopie d'ordre** n**, sphères**)**.** On dénote par $\mathbb{S}^n$ la n-sphère, avec un point base $s_0 \in \mathbb{S}^n$. Soit X un espace topologique, et $x_0 \in X$. Considérons l'espace $\tilde{F}_n(X, x_0)$ l'espace des fonctions continues $f : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (X, x_0)$, c'est à dire, $f : \mathbb{S}^n \to X$ et $f(s_0) = x_0$. Soit $\Psi : I^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue qui induit un homéomorphisme $\Phi : I^n / \partial I^n \to \mathbb{S}^n$. Soit $s_0 = \Phi([\partial I^n])$.

(a) Montrer que l'application $\Psi^* : \tilde{F}_n(X, x_0) \to F_n(X, x_0)$ définie par $\Psi^* f = f \circ \Psi$ est un homéomorphisme, où dans les deux espaces on considère la topologie compacte-ouverte.

(b) Montrer que $\Psi^* f \sim \Psi^* g$ si et seulement si f et g son homotopiquement équivalent relativement à s_0 (relation notée encore par $\sim$).

On en déduit que $\pi_n(X, x_0) \cong \tilde{F}_n(X, x_0)/\sim$.
Soient $f, g \in \tilde{F}_n(X, x_0)$. On définit $f * g$ comme suit. D'abord, on considère $S = (\mathbb{S}^n, s_0) \vee (\mathbb{S}^n, s_0)$ le bouquet de deux n-sphères sur s_0, et $\Phi : (\mathbb{S}^n, s_0) \to (S, s_0)$ l'application continue obtenue en contractant un équateur qui contient s_0 sur le point base du bouquet. En suite, on considère l'application $h : (S, s_0) \to X$ définie comme f sur le premier $(\mathbb{S}^n, s_0)$, et g sur le deuxième $(\mathbb{S}^n, s_0)$. On définit $f * g$ comme $h \circ \Phi$.

(c) Montrer que l'opération $f * g$ passe au quotient et donne une opération $[f] * [g] := [f * g]$, qui coïncide avec $*$ défini dans l'exercice précédent sur $\pi_n(X, x_0)$.

Considerons maintenant G le groupe fondamental $G = \pi_1(F_{n-1}(X, x_0), x_0)$, où le dernier x_0 indique la fonction constante égale à x_0 définie sur $\mathbb{S}^{n-1}$.

(d) Montrer que le groupe G est isomorphe à $\pi_n(X, x_0)$.

(e) En déduire que si X est connexe par arcs, alors pour tout $x_0, x_0' \in X$ on a $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_0')$.

Exercice 18 (**Groupes d'homotopie relative**)**.** On considère le n-cube I^n, et $I^{n-1} \cong I^{n-1} \times \{0\}$ comme plongé dans I^n. Soit J^{n-1} l'adhérence de $\partial I^n \setminus I^{n-1}$. Soit X un espace topologique, A une partie de X et $x_0 \in A$ un point base. Soit $F_n(X, A, x_0)$ l'espace des fonctions continues $f : I^n \to X$ tels que $f(\partial I^n) \subseteq A$ et $f(J^{n-1}) = x_0$.
Sur $F_n(X, A, X_0)$ on considère la relation d'équivalence donnée par $f \sim g$ si et seulement s'il existe une homotopie $H : I^n \times I$ entre f et g, relative à J^{n-1} (c'est-à-dire, $H_t|_{J^{n-1}} = x_0$ pour tout t), et telle que $H_t(\partial I^n) \subseteq A$ pour tout t.
On dénote par $\pi_n(X, A, x_0)$ le quotient de $F_n(X, A, x_0)$ par $\sim$.

(a) Montrer que l'opération $* = *_1$ définie par (1) définit une opération sur $F_n(X, A, x_0)$, qui passe au quotient $\pi_n(X, A, x_0)$.

(b) Montrer que $(\pi_n(X, A, x_0), *)$ est un groupe pour $n \geq 2$, et qu'il est abélien pour $n \geq 3$.

(c) C'est analogue au cas non rélatif, ici il y a un décalage de 1 car il faut travailler en tenant compte du comportement sur I^{n-1}.

On remarque que $\pi_n(X, A, x_0)$ peut être défini aussi comme classes d'homotopie de fonctions continues $f : (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$, où s_0 est un point base dans $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n$ (le bord vu dans $\mathbb{R}^n$). L'homotopie est dans ce cas relative à s_0, et telle que $H_t(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq A$ pour tout t.

(c) Montrer que la classe d'une application $f : (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ est nulle dans $\pi_n(X, A, x_0)$ si et seulement si f est homotopiquement équivalent relativement à $\mathbb{S}^{n-1}$ à une application dont l'image est contenue dans A.